ȘCOALA GIMNAZIALĂ SASCUT

Prof. PASCU ION

TEST PENTRU OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

CLASA a VIII - a

I. Se consideră numărul nenegativ $n = 2ab + 2a - 2a^2 - b^2$, a, b$\in$R.

a). Aflaţi intervalul pe care îl parcurge fiecare din numerele reale a şi b;

b). Aflaţi a şi b astfel încât $\sqrt{(1-n):2}$ şi $\sqrt{(1-n):3} \in Q$.

II. Se dau numerele $a = \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - 2}$ şi $b = \left(\frac{x-2}{x^2 - 3x + 2} - \frac{x+3}{x^2 + 4x + 3}\right) \cdot \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$.

a). Aflaţi $x \in R$ astfel încât $a \cdot b = 1$.

b). Aflaţi $x \in R$ astfel încât $a + b \geq 2$.

III. Se consideră cubul ABCDA`B`C`D` de latură a. Dacă M şi N sunt mijloacele laturilor (BC), respectiv (B`C`) şi P$\in$ (D`C`) astfel încât D`P = $3 \cdot$PC`, calculaţi:

a). măsura unghiului format de dreptele NP şi AM;

b). distanţa de la punctul P la dreapta AM.

IV. Se consideră ΔABC, dreptunghic în A, I centrul cercului înscris în triunghi, AB = c, AC = 0,75c, N$\in$(AC), astfel încât AN = 0,25c. Pe planul triunghiului se ridică o perpendiculară în I pe care se ia un punct M astfel încât MI = $\frac{c\sqrt{3}}{8}$. Calculaţi:

a). lungimea segmentului [MN];

b). distanţa de la N la planul (MAB).

BAREM DE CORECTARE

I. a). $(a-b)^2 + (a-1)^2 + n - 1 = 0 \Rightarrow$ .... 1 p

$(a-1)^2 = 1 - n - (a-b)^2 \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2} \leq 1 \Leftrightarrow |a-1| \leq 1 \Leftrightarrow a \in [0;2]$. .... 1 p

La fel $(a-b)^2 = 1 - n - (a-1)^2 \leq 1$, de unde $\Rightarrow$ analog că $b \in [-1;3]$. .... 1 p b). $\sqrt{(1-n):2} \in Q \Rightarrow 1-n=2k^2, k \in Q$ 1

p

$\sqrt{(1-n):3} \in Q \Rightarrow 1-n=3h^2, h \in Q$, ... 1

p

de unde se obţine $2k^2 = 3h^2$. .... 1 p

Dacă $k \neq 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} = \left|\frac{h}{k}\right| \in Q \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} \in Q(F) \Rightarrow k=0 \Rightarrow 1-n=0 \Leftrightarrow a=b=1$. .... 1 p

II. a). $a = \frac{(x-1)^2}{2(x-1)} = \frac{x-1}{2}$, $x \in R - \{1\}$ şi .... 1 p

$b = \left[\frac{x-2}{(x-2)(x-1)} - \frac{x+3}{(x+1)(x+3)}\right] \cdot \frac{(x-3)(x+1)}{x-3} = \frac{2}{x-1}$, $x \in R - \{\pm 1, 2, \pm 3\}$. $\Rightarrow$ .... 2 p

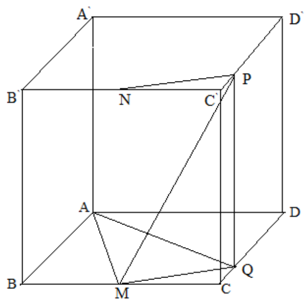
$a \cdot b = 1$, dacă $x \in R - \{\pm 1, 2, \pm 3\}$. .... 1 p

b). $a + b \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} + \frac{2}{x-1} \geq 2 \Leftrightarrow$ .... 1 p

$\frac{(x-3)^2}{2(x-1)} \geq 0 \Rightarrow x = 3$ sau $x > 1 \Rightarrow$ .... 1 p

$x \in (1,2) \cup (2,3) \cup (3,\infty)$ având în vedere condițiile de existență. .... 1 p

III.



.... 1 p

a). Fie $Q \in (CD)$ a.î. DQ = 3QC $\Rightarrow$ PN || QM $\Rightarrow$ $m(\angle(NP, AM)) = m(\angle(QM, AM))$ (= 90^0), 1p

deoarece: $QC = \frac{a}{4}, QD = \frac{3a}{4}$, $CM = BM = \frac{a}{2}$ şi calculând în triunghiurile dreptunghice ABM,

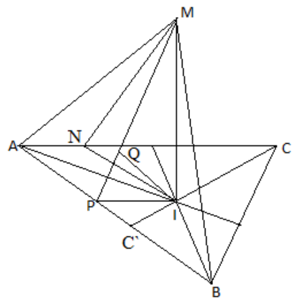
QCM, ADQ obţinem $AM^2 = \frac{5a^2}{4}, QM^2 = \frac{5a^2}{16}$ şi respectiv $AQ^2 = \frac{25a^2}{16}$ $\Rightarrow$ .... 2 p

$AQ^2 = AM^2 + QM^2 \Rightarrow \Delta AMQ$ - dr. $(m(\angle M) = 90^0)$. .... 1 p

b). Aplicând teorema celor trei perpendiculare .... 1 p

$\Rightarrow d(P, AM) = PM = \dfrac{a\sqrt{21}}{4}$. .... 1 p

IV.



.... 1 p

a). Fie C` piciorul bisectoarei din C, $C` \in (AB)$. Aplicând teorema bisectoarei în ΔABC şi apoi în $\Delta AC`C \Rightarrow AC` = \dfrac{3c}{8}$ şi $\dfrac{C`I}{CI} = \dfrac{1}{2}$. .... 1 p

Cum $\dfrac{AN}{CN} = \dfrac{0{,}25c}{0{,}5c} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{C`I}{CI} = \dfrac{AN}{CN} \overset{R.T.Th}{\Rightarrow} NI \parallel AB \Rightarrow IN \perp AC \Rightarrow IN = r = \dfrac{A_{ABC}}{p_{ABC}} \Rightarrow IN = \dfrac{c}{4} \Rightarrow$ .... 1 p

$MN = \dfrac{c\sqrt{7}}{8}$, calculată în triunghiul dreprunghic MIN .... 1 p

b). $NI \parallel AB \Rightarrow NI \parallel (MAB) \Rightarrow d(N,(MAB)) = d(I,(MAB)) =$ IQ. .... 2 p

$IQ = \dfrac{c\sqrt{21}}{28}$, fiind lungimea înălţimii din I a ΔMIP dreptunghic în I, iar $IP \perp AB$, $P \in (AB)$ și $IQ \perp MP$ $Q \in (MP)$. .... 1 p