# ELEMENTE DE COMBINATORICĂ

**PROF TONIȚĂ RODICA**
**COLEGIUL ECONOMIC ”VIRGIL MADGEARU” GALAȚI**

Adesea suntem nevoiți să alegem dintr-o mulțime oarecare de obiecte submulțimi de elemente în funcție de anumite proprietăți pe care acestea le posedă și să dispunem elementele uneia sau ale mai multor mulțimi într-o anumită ordine. În plus este posibil să fim puși în situația de a determina numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi, constituite după anumite reguli.

Deoarece în astfel de situații este vorba de anumite combinații de obiecte, ele se numesc probleme combinatorii. Combinatorica este domeniul matematicii în care se studiază acest tip de probleme. Ea poate fi considerată ca o parte a teoriei mulțimilor pentru că orice problemă de combinatorică poate fi redusă la o problemă despre mulțimi finite și aplicații.

Combinatorica este foarte importantă nu numai pentru teoria probabilităților, cibernetică, logica matematică, teoria numerelor ci și pentru alte ramuri ale științei și tehnicii.

**I.1. Mulțimi ordonate**

Uneori se consideră mulțimi ale căror elemente sunt aranjate într-o ordine determinată, cum ar fi alfabetul care este o mulțime de litere (elemente) care sunt stabilite într-o anumită ordine. Adică cele 27 de litere din alfabetul românesc sunt aranjate astfel: *a* este prima literă (nu are altă literă înainte), *ă* este următoarea (urmează după *a*), *b* este a treia literă (urmează după a doua) și astfel până la *z* care este ultima (după ea nu mai urmează altă literă). Dar elementele aceleiași mulțimi pot fi aranjate și într-o altă ordine de exemplu invers, sau grupate în vocale și consoane.

Deci: *o mulțime împreună cu o ordine bine determinată de dispunere a elementelor sale este o mulțime ordonată.* Concret:

Fie *A* o mulțime (finită) care are *n* elemente. Această mulțime se numește ordonată dacă fiecărui element al său i se asociază un număr de la 1 la *n,* numit *rangul* elementului, astfel încât la elemente diferite ale lui *A* corespund numere diferite.

Orice mulțime finită poate deveni o mulțime ordonată, adică elementele ei se pot așeza într-o ordine care se poate stabili, pur și simplu, prin numerotarea elementelor mulțimii. Mulțimea ordonată obținută astfel o notăm cu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, unde ordinea elementelor este dată de indici.

*Mulțimea ordonată este caracterizată prin elementele care o alcătuiesc și prin ordinea în care acestea sunt considerate.*

Prin urmare mulțimile ordonate sunt diferite dacă ele se deosebesc fie prin elementele care le alcătuiesc, fie prin ordinea acestora.

**I.2. Permutări**

Considerăm *A* o mulțime (finită) cu *n* elemente. Această mulțime se poate ordona în mai multe moduri, obținând astfel mulțimi ordonate diferite, care se deosebesc între ele doar prin ordinea elementelor.

*Fiecare din mulțimile ordonate care se formează cu cele n elemente ale mulțimii A, se numește* ***permutare*** *a acestei mulțimi.*

Se mai spune că este o *permutare a elementelor sale* sau, încă, o *permutare de n elemente*.

Numărul permutărilor de *n* elemente se notează cu $P_n$ și se citește ”permutări de *n*”.

Pentru două mulțimi finite M si N, cu același numar de elemente,si o funcție f: M→ *N* sunt echivalente afirmațiile :

f injective ↔ f surjectiva ↔ f bijectiva

Permutarea unei mulţimi A este definită de o funcţie bijectivă $f:\{1,2,\ldots\ldots,n\} \to A$

Numărul permutărilor unei mulțimi date, adică numărul modurilor în care poate să fie ordonată o mulțime dată se notează cu $P_n$.

Pentru produsul primelor *n* numere naturale nenule se folosește, de obicei, notația *n* ! care se citește ”*n* factorial”:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

În ceea ce privește numărul permutărilor avem:

*Teoremă:* Oricare ar fi $n \geq 1$, număr natural, $P_n = n\,!$ (1)

*Demonstrație:* Vom demonstra teorema prin metoda inducției matematice. Să notăm cu P(*n*) egalitatea (1).

1° P(1) este adevărată deoarece am observat mai înainte că $P_1 = 1 = 1!$.

2° Să arătăm că P(*k*) $\Longrightarrow$ P(*k* + 1).

Să ordonăm în toate modurile posibile o mulțime cu *k* +1 elemente. Oricare din cele *k* +1 elemente ale mulțimii poate ocupa ultimul loc, al (*k* + 1)-lea. Se obțin astfel *k* +1 moduri diferite de a ocupa ultimul loc. Să considerăm unul din ele, în care un element ales al mulțimii va avea rangul *k*+1. Elementele rămase care sunt în număr de *k*, trebuie să ocupe primele *k* locuri, iar aceasta se poate face în $P_k$ moduri diferite. Se obțin, așadar, $(k+1)P_k$ moduri de a ordona o mulțime care are *k +1* elemente. Deci $P_{k+1} = (k+1)\,P_k$. Dar cum *P(k)* este adevărată, avem $P_k = k!$ de unde $P_{k+1} = (k+1)\,k! = (k+1)\,k!$. Conform metodei inducției matematice teorema este demonstrată.

Convenim să considerăm că mulțimea vidă poate fi ordonată într-un singur mod adică $P_0 = 1$.

Deci, definim 0! =1.

**De reţinut!**

$P_0 = 0! = 1$(conventie)

$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots\cdots n = n\,!$

$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \cdots\cdots (n-k+1)\ P_{n-k}$ sau $n! = (n-k)!\ (n-k+1) \cdots\cdots (n-1)n$, $k \leq n$

$P_{n+1} = (n+1)\ P_n$

$k!k = (k+1)! - k!$, $0 \leq k \leq n$

$\sum_{k=1}^{n} k!\,k = (n-1)! - 1!$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k-1)!} = 1 - \frac{1}{(n-1)!}$

## I.3. Aranjamente

Fie dată o mulțime *A* cu *n* elemente. Dacă $m \leq n$, atunci se pot forma diferite mulțimi ordonate cu câte *m* elemente fiecare, în care intră numai elemente ale mulțimii *A*.

Mulțimile ordonate care se formează cu elementele unei submulțimi oarecare a unei mulțimi finite *A,* se numesc *submulțimi ordonate* ale lui *A,* sau *aranjamente.*

*Dacă A este o mulțime cu n elemente, atunci submulțimile ordonate ale lui A, având fiecare câte k elemente, unde $0 \leq k \leq n$, se numesc* ***aranjamente de n elemente luate câte k.***

Observăm că două aranjamente de *n* elemente luate câte *k* se deosebesc prin *natura* elementelor ori prin *ordinea* lor. Numărul aranjamentelor de *n* elemente luate câte *k* se notează $\boldsymbol{A_n^k}$ se citește „aranjamente de *n* luate câte *k*”.

Ne propunem, în continuare, să găsim o formulă pentru calculul numărului $A_n^k$.

Observăm că $A_n^1 = n$.

Într-adevăr, un element din cele *n* elemente poate fi ales în *n* moduri, iar cu acest element ales se formează o singură mulțime ordonată.

Formula care exprimă $A_n^k$ în funcție de *n* și *k*, este dată de următoarea teoremă.

***Teoremă***

Dacă *k* și *n* sunt numere naturale astfel încât $0 < k < n$, atunci:

$$A_n^k = n(n\text{-}1)(n\text{-}2) \ldots (n\text{-}k + 1). \qquad (1)$$

*Demonstrație.* Să considerăm mai întâi $0 < k < n$ și să arătăm $A_n^{k+1} = (n - k)\, A_n^k$.

Într-adevăr ca să repartizăm oricare $k + 1$ elemente, luate din *n* elemente date, pe $k + 1$ locuri, se pot lua mai întâi oricare *k* elemente și aranja pe primele *k* locuri. Aceasta se poate face în $A_n^k$ moduri. În fiecare din aceste cazuri rămân $(n - k)$ elemente. Oricare din aceste elemente se poate pune pe al $(k + 1)$-lea loc. Astfel, în fiecare din cele $A_n^k$ moduri de aranjare a elementelor pe primele *k* locuri, obținem $(n - k)$ posibilități prin care al $(k + 1)$-lea loc este ocupat de unul din cele $(n - k)$ elemente rămase. Prin urmare, avem $A_n^{k+1} = (n - k)\, A_n^k$.

Având în vedere că $A_n^1 = n$, deducem succesiv:

$$A_n^2 = n(n - 1), \quad A_n^3 = n(n - 1)(n - 2),$$

$$A_n^k = n(n - 1)(n - 2) \ldots (n - k + 1).$$

Să dăm o altă formă formulei (1). Produsul $n(n - 1) \ldots (n - k + 1)$ se poate scrie sub forma:

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)\ldots 2\cdot 1}{(n-k)\ldots 2\cdot 1}$$

adică sub forma: $\frac{n!}{(n-k)!}$. Deci

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} . \qquad (2)$$

Pentru $k = 0$ formula (2) dă

$$A_n^0 = 1.$$

Acest lucru este adevărat, deoarece orice mulțime conține mulțimea vidă, despre care am convenit să o considerăm ordonată într-un singur mod. Pentru $k = n$ formula (2) dă:

$$A_n^n = n! = P_n .$$

Așadar formulele (1) și (2) sunt adevărate pentru orice *k*, astfel încât $0 \le k \le n$.

**De retinut!**

$A_n^k = \frac{Pn}{Pn-k} = \frac{n!}{(n-k)!}$ , $n \in N^*, k \in N, k \le n$

$A_n^k = (n\text{-}k+1)A_n^{k-1}$ , $n \in N^*, k \in N, k \le n$ (formula de recurență)

$P_n = (n\text{-}k)!\, A_n^k$ , $n \in N^*, k \in N, k \le n$.

***Aplicație la numărul funcțiilor injective și bijective***

Să notăm $N_m = \{1, 2, \ldots, m\}$.

Să presupunem că *B* este o mulțime cu *n* elemente ($m \le n$). Atunci fiecărei funcții injective $f: N_m \to B$ îi corespunde o submulțime ordonată a lui *B*, care este formată din elementele $b_1 = f(1)$, $b_2 = f(2)$, ..., $b_m = f(m)$ (toate aceste elemente sunt diferite între ele, după injectivitatea funcției *f*). Invers, fiecare submulțime ordonată, având *m* elemente, a lui *B*, definește o funcție injectivă *f* de la $N_m$ la *B*, prin care $f(k) = b_k$.

Este clar că în loc de $N_m$ se poate lua orice mulțime *A* cu *m* elemente.

Astfel, *numărul funcțiilor injective definite pe o mulțime A cu m elemente cu valori intr-o mulțime. B cu n elemente (m ≤ n), este egal cu numărul submulțimilor ordonate, având câte m elemente, ale lui B, adică cu* $A_n^m$ .

*Dacă m = n, adică A și B au același număr n de elemente, atunci orice funcție f: A→ B care este injectivă, este neapărat bijectivă.*

Rămâne de arătat că *f* este surjectivă. Să presupunem prin absurd că *f* nu este surjectivă. Deoarece *f* este injectivă, adică la elemente diferite din mulțimea *A* corespund prin *f* elemente diferite din mulțimea *B* rezultă că mulțimea *f* (A) = {*f*(*x*) | *x* ∈ *A*} are *n* elemente. Deoarece *f* nu este surjectivă, există un element *b* ∈ *B* astfel încât *f*(*a*) ≠ b pentru orice *a* ∈ *A*. Deci b ∉ *f*(A) și astfel *f*(A) are mai puțin de *n* elemente; contradicție. Această contradicție arată că *f* este, neapărat surjectivă. Deci *f* este injectivă și surjectivă, adică bijectivă.

Având în vedere cele de mai înainte, rezultă că *numărul funcțiilor bijective definite pe o mulțime A cu n elemente cu valori într-o mulțime B tot cu n elemente este egal cu* $A_n^n = P_n$*, adică n!*.

În particular, dacă *A* =*B* rezultă că numărul funcțiilor bijective definite pe o mulțime cu *n* elemente cu valori în ea însăși este egal cu numărul permutărilor mulțimii *A*, adică $P_n = n!$.

Din acest motiv, de obicei, o funcție bijectivă definită pe o mulțime cu valori în ea însăși se numește permutare a acestei mulțimi.

### I.4. Combinări

*Daca A este o mulțime eu n elemente, atunci submulțimile lui A având fiecare câte k elemente, unde 0 ≤ k ≤ n, se numesc* ***combinări de n elemente luate câte k****. Numărul combinărilor de n elemente luate câte k se notează* $C_n^k$*, și se citește „combinări de n luate câte k“*.*

Ne propunem în continuare să găsim o formulă pentru calculul numărului $C_n^k$.

Observăm că $C_n^2$=1 deoarece fiecare mulțime *A* are numai o submulțime fără nici un element și anume mulțimea vidă. Apoi, $C_n^1 = n$ deoarece o mulțime cu *n* elemente $A = \{a_1\ a_2, ..., a_n\}$ are exact *n* submulțimi cu un singur element, adică submulțimile de forma $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, ..., $\{a_n\}$. Formula care exprimă $C_n^k$ în funcție de *n* și *k*, este dată de următoarea teoremă:

Dacă *k* și *n* sunt numere naturale, astfel încât 0 ≤ k ≤ n, atunci

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}. \qquad (1)$$

*Demonstrație.* Fie *A* o mulțime cu *n* elemente. Să considerăm toate submulțimile mulțimii *A* care au *k* elemente. Ordonăm fiecare dintre aceste submulțimi în toate modurile posibile. Obținem astfel, toate submulțimile ordonate ale lui *A,* care au câte *k* elemente. Numărul lor, după cum știm, este $A_n^k$. Dar cum numărul tuturor submulțimilor lui *A* având *k* elemente este egal cu $C_n^k$, iar fiecare din acestea se pot ordona în $P_k$ moduri, rezultă că $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$. Din această egalitate rezultă că

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}.$$

Înlocuind în această formulă expresiile $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, $P_k = k!$, obținem $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ceea ce se mai poate scrie:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

1. *Câteva* ***proprietăți ale numerelor*** $C_n^k$

Numerele $C_n^k$ au o serie de proprietăți importante. Ele exprimă diferite relații între submulțimile unei mulțimi. Aceste proprietăți se pot demonstra direct din formula pentru $C_n^k$. Mai instructive sunt însă demonstrațiile bazate pe raționamente cu mulțimi.

*1° Formula combinărilor complementare. Dacă* $0 \leq k \leq n$, *atunci este adevărată egalitatea:*

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

2° *Pentru orice număr natural* $n \geq 0$ *este adevărată egalitatea*

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n. \quad (2)$$

*Demonstrație.* Suma din membrul stâng al egalității reprezintă tocmai numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi cu *n* elemente. Egalitatea (2) rezultă din teorema următoare:

***Numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi formate din n elemente este egal cu*** $2^n$.

*3°. Formula de recurență pentru calculul numărului de combinări. Pentru orice k și n astfel încât* $0 \leq k < n$, *este adevărată egalitatea*:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \quad (3)$$

3. ***O interpretare geometrica pentru numerele*** $C_n^k$

Fie numerele naturale *k* și *n* astfel încât $0 \leq k \leq n$. În continuare se va da o interpretare geometrică interesantă a numărului $C_n^k$.

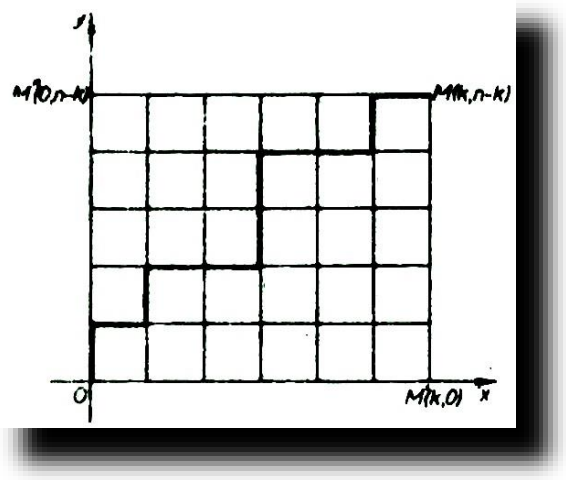


**Fig. I.1.**

Fie planul xOy și punctul M (*k, n-k*). Notăm cu M' și M" punctele de coordonate (*k*, 0), respectiv (0, *n - k*). Realizăm rețeaua din figura 1.1, cu pătrate de latură 1 (adică, un caroiaj al dreptunghiului OM'MM" cu pătrate de latură 1). Acestea sunt în număr de $k \cdot (n - k)$.

Vârfurile celor $k \cdot (n - k)$ pătrate se numesc nodurile rețelei. Numim *drum pe rețea* o linie frântă care unește două noduri oarecare ale rețelei și este formată din laturi succesive ale pătratelor rețelei.

Se pune problema determinării numărului drumurilor pe rețea *minimale (cele mai scurte)* care unesc punctul *O* (0, 0) cu punctul M(*k, n-k*). Se observă că un drum pe rețea minimal, care unește *O* cu *M*, este format din $k + (n - k) = n$ segmente (de lungime 1, dintre care *k* segmente orizontale și *(n - k)* segmente verticale. Drumurile diferă între ele doar prin ordinea de succesiune a segmentelor orizontale și verticale. De aceea numărul tuturor acestor drumuri este egal cu numărul tuturor posibilităților prin care din *n* segmente se pot alege *k* segmente orizontale, adică $C_n^k$.

Remarcăm că *n* este suma coordonatelor punctului *M*.

S-ar putea considera numărul posibilităților de alegere a (*n* - *k*) segmente verticale din cele *n* segmente și atunci obținerii numărul $C_n^{n-k}$

Astfel, am stabilit geometric formula combinărilor complementare: $C_n^k = C_n^{n-k}$.

**Să demonstrăm în același fel formula de recurență pentru calculul numărului de combinări.**

Să considerăm rețeaua din figura 1.2, pe care figurăm punctele $M_1(k-1, n-k)$ și $M_2$(k, n - k - 1).

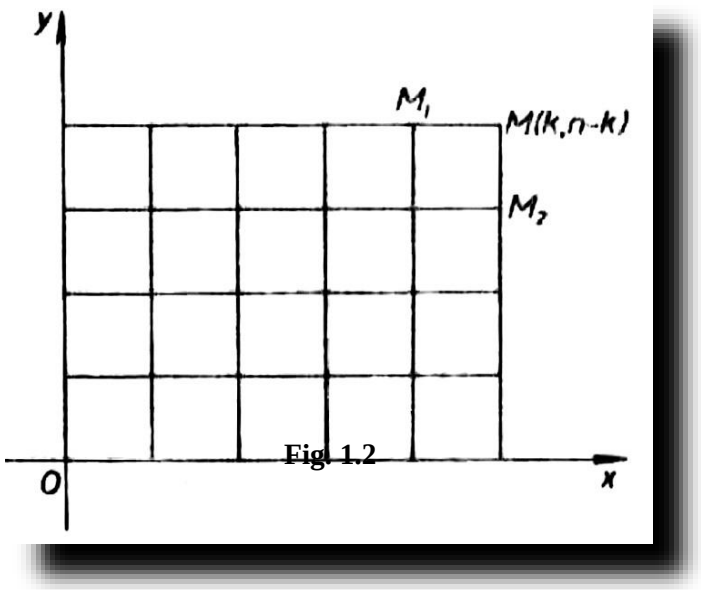

**Fig. 1.2**

Rezultă că numărul tuturor drumurilor minimale care unesc *O* (0, 0), cu *M* (*k*, *n* - *k*) este $C_n^k$. Toate aceste drumuri le împărțim în două clase (disjuncte): drumuri care trec prin punctul M1 și drumuri care trec prin punctul $M_2$. Cum suma coordonatelor fiecăruia din punctele $M_1$ și $M_2$ este n - 1 rezultă că numărul drumurilor care trec prin $M_1$ este $C_{n-1}^k$, iar numărul drumurilor care trec prin $M_2$ este $C_{n-1}^{k-1}$ , de unde rezultă

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

**Teorema :** Au loc următoarele **proprietăţi şi formule** ale permutărilor, aranjamentelor şi combinărilor (fără repetiţie):

**1)** $P_0 = 0! = 1$; $P_1 = 1! = 1$;

**2)** $P_n = n \cdot P_{n-1}, n \in N^*$ (**relaţia de recurenţă liniară (de ordinul întâi)** pentru calculul permutărilor);

**3)** $P_n = (n-1) \cdot (P_{n-1} + P_{n-2}), \forall n \in N$ (**relaţia de recurenţă de ordinul doi** pentru calculul permutărilor);

**4)** $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$ ***sau*** $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$ ***sau*** $P_k = \frac{A_n^k}{C_n^k}$, unde $n, k \in N,\ 0 \le k \le n$;

**5)** $C_n^k = C_n^{n-k}$, unde $n, k \in N,\ 0 \le k \le n$ **(formula combinărilor complementare)**;

**6)** $C_n^1 = n$; $A_n^1 = n$, $\forall n \in N^*$;

**7)** $C_n^0 = 1$; $A_n^0 = 1$, $\forall n \in N$;

**8)** $C_n^n = 1$; $A_n^n = A_n^{n-1} = P_n = n!$, $\forall n \in N^*$;

**9)** $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$, unde $n, k \in N,\ 0 \le k \le n$ **(formula (relaţia) de recurenţa a combinărilor)**;

**10)** $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ ***sau*** $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$ ***sau*** $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k+1}$, unde $n, k \in N,\ 0 \le k \le n$

**11)** $A_{n-1}^k = A_n^k - k \cdot A_{n-1}^{k-1}$ ***sau*** $A_n^k = A_{n-1}^k + k \cdot A_{n-1}^{k-1}$, unde $n,k \in N^*$, $0 \le k \le n$ **(formule de recurenţa ale aranjamentelor)**;

**12)** $C_n^k = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k}$, unde $n,k \in N^*$, $0 \le k \le n$;

**13)** $C_n^{k+1} = \dfrac{n-k}{k+1} \cdot C_n^k$, unde $n,k \in N$, $0 \le k \le n$. **(relaţie de recurenţă)**;

**14)** $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-3}^{k-1} + ... + C_{k-1}^{k-1}$, unde $n,k \in N^*$, $0 \le k \le n$;

**Observaţii (necesare pentru aplicarea în practică):**

1. La rezolvarea ecuaţiilor, inecuaţiilor şi sistemelor ce conţin $C_n^k$, $A_n^k$ şi $P_n$ au loc următoarele **condiţii de existenţă** :

$$\begin{cases} n \in N \\ k \in N \\ n \ge k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n,k \in N \\ n \ge 0 \\ k \ge 0 \\ n \ge k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n,k \in N \\ 0 \le k \le n \end{cases}$$

2. La rezolvarea ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii ce conţin $C_n^k$, $A_n^k$ şi $P_n$ se determină aparte condiţiile de existenţă, apoi se rezolvă ecuaţia şi în calitate de soluţii se aleg acele valori care verifică condiţiile de existenţă.

3. La rezolvarea inecuaţiilor şi sistemelor de inecuaţii ce conţin $C_n^k$, $A_n^k$ şi $P_n$: a) Se determină aparte (CE), apoi se rezolvă inecuaţia ***sau*** sistemul de inecuaţii împreună (în sistem) cu (CE);

   b) Se rezolvă inecuaţia ***sau*** sistemul de inecuaţii împreună cu (CE).