FIȘĂ DE LUCRU

GAVRILĂ CLAUDIU-MARCEL,
LICEUL TEHNOLOGIC HORIA VINTILĂ SEGARCEA

Progresii aritmetice

Definiție. Șirul numeric $(a_n)_{n\in N}$ se numește progresie aritmetică, dacă există un număr real d, numit rația progresiei, astfel încât

$$a_{n+1} - a_n = d, (\forall n \in N)$$

adică dacă fiecare termen al șirului (începând cu al doilea) este egal cu precedentul plus unul și același număr(rația). Elementul a_n se numește termen general al progresiei sau termen de rang n.

Proprietăți ale progresiei aritmetice

P1. Termenul general al progresiei aritmetice se poate determina prin formula

$a_n = a_1 + (n - 1)d$, unde a_1 - primul termen al progresiei, d - ratia ei.

P2. Termenul de rang n este media aritmetică a termenilor echidistanti de el:

$a_{n-k} + a_{n+k} = 2 \cdot a_n$, $k = 1... n - 1$

P3. Daca $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ este o progresie aritmetica si $k + n = m + p$ ($k, n, m, p \in N$), atunci $a_k + a_n = a_m + a_p$.

P4. Formula sumei S_n primilor n termeni ai progresiei aritmetice:

$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$, sau utilizând P1, avem $S_n = \frac{2\cdot a_1+(n-1)d}{2} \cdot n$

Probleme propuse:

1. Determinați al nouălea termen al șirului 2, 5, 8, ...
2. Se consideră şirul: $1\frac{1}{4}, 2\frac{1}{4}, 3\frac{1}{4}, 4\frac{1}{4}, \ldots, 2010\frac{1}{4}, \ldots$
   a. Scrieţi termenii de rang 3, 7, 2020.
   b. Aflaţi suma primilor 55 de termeni.

3. Să se demonstreze că numerele:
   a. $\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$;
   b. $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$;
   c. $\sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{11}$;
   d. $\sqrt{5}, \sqrt{13}, \sqrt{21}$,

   nu pot fi termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.
4. Să se determine numarul real a, știind că numerele 2^a, $2^{2a} + 2^0, 2^a \cdot 2 + 1$, sunt în progresie aritmetică.
5. Fie $(a_n)_{n \in N^*}$ un șir dat prin termenul general:
   a. $a_n = 2n + 1$;
   b. $a_n = -3n + 1$;
   c. $a_n = 3n - 7$.

   Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n \in N^*}$ este o progresie aritmetică și să se determine primul termen și rația.

Progresii geometrice

Definiție. Șirul numeric $(b_n)n \in N$ se numește progresie geometrică, dacă există așa un număr q, numit rația progresiei, astfel încât

$$b_{n+1} = b_n \cdot q, (\forall n \in N)$$

adică dacă fiecare termen al șirului(începând cu al doilea) este egal cu produsul dintre termenul precedent și unul și același număr (rația). Elementul b_n se numește termen general al progresiei de rang n.

Proprietăți ale progresiei geometrice

P1. Termenul de rang n al progresiei geometrice se determină prin formula

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, (\forall n \in N)$$

P2. Pătratul termenului de rang n este egal cu produsul termenilor echidistanți de el:

$$b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}, (n \geq 2, k = 1, 2, \ldots, n - 1)$$

în caz particular, pentru orice trei termeni consecutivi

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

P3. Daca $k + n = m + p$ $(k, n, m, p \in N)$, atunci

$$b_k \cdot b_n = b_m \cdot b_p,$$

unde b_k, b_n, b_m, b_p - termeni ai progresiei geometrice b_1, b_2, ...

P4. Suma primilor n termeni S_n ai unei progresii geometrice se determină prin formula

$$S_n = \frac{b_1 - b_n \cdot q}{1-q}, \ (q \neq 1),$$

unde b_1 - primul termen, q - ratia, si b_n - termenul general al progresiei geometrice.

Probleme propuse:

1. Demonstraţi că numerele $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ nu pot fi termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice sau geometrice.
2. Aflaţi $n \in \mathrm{N}$ din egalitatea: $1+3+3^2+3^3+...+3^n = 1093.$
3. Să se găsească primul termen şi raţia unei progresii geometrice (b_n), dacă $b_5 - b_1 = 15$ şi $b_4 - b_2 = 9$.
4. Să se determine numărul real x, ştiind că 5-x, x+7si 3x+11sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.
5. Se consideră şirul $(x_n)_{n \in N}$, unde $x_0 = a$, $x_1 = b$, cu $a < b$, iar $x_{n+1} = 3x_n - 2x_{n-1}$, $\forall n \in N^*$. Să se arate că şirul $(y_n)_{n \geq 1}$ este o progresie geometrică, unde $y_n = x_n - x_{n-1}$.