**Liceul Teoretic ”Paul Georgescu” Țăndărei**

**Profesor: Constantin Paula**

**FIȘĂ DE LUCRU**

**Progresii aritmetice și progresii geometrice – Aplicații în contextul pregătirii pentru examenul de Bacalaureat – clasa a XII-a**

**SUBIECTUL I**

1. Aflați suma primilor trei termeni ai prgresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ dacă $a_1 = 3\ si\ a_2 = 7$.
2. Să se determine primul termen al progresiei geometrice cu termeni pozitivi $b_1, 6, b_3, 24, .....$
3. Să se determine primul termen si ratia unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ daca $S_7 = 7$ si $a_3 + a_6 + a_7 = 7$.
4. Un triunghi dreptunghic are măsurile unghiurilor în progresie aritmetică și ipotenuza de 20 cm. Să se calculeze perimetrul triunghiului.
5. Determinați numerele reale nenule x , astfel încât numerele $1; 1 - 2^x; 2^x + 5$ să fie în progresie geometrică.
6. Să se determine $x \in \boldsymbol{N}$ pentru care $1 + 3 + 5 + ... + x = 225$.

**SUBIECTUL al II-lea**

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x + ay = 1 \\ y + az = a \\ x + z = 1 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}^*$.

   Să se arate că sistemul are, $(\forall) a \in \mathbb{R}^*$ , o soluție unică formată din trei numere în progresie geometrică.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\boldsymbol{R})$.

   a) Să se arate că $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & n \cdot 3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}, n \in \boldsymbol{N}^*$ .

   b) Să se calculeze $\det(A + A^2 + A^3 + \cdots + A^n)$ , $n \in \boldsymbol{N}^*$.

**SUBIECTUL al III-lea**

1. Fie șirul $(u_n)_{n\in N}$ definit prin recurență: $u_0 = 0, u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}$ , $(\forall) n \in \boldsymbol{N}$ și șirul $(v_n)_{n\in N}$ , $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$.

a) Arătați că șirul $(v_n)_{n\in N}$ este o progresie geometrică, precizând primul termen și rația.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ .

2. Se consideră numerele reale $A = 2 + \int_0^{\ln \pi} (e^{2x} + e^x)\, dx$ ; $B = \int_1^e \ln x^2 dx$ ; $C = 1 + \int_0^{\pi} x \sin x\, dx$.

a) Arătați că numerele A, C, B sunt în progresie geometrică.

b) Demonstrați că numerele $\ln A$ , $\ln C$ , $\ln B$ sunt în progresie aritmetică.