Fisă de lucru
Matrice. Programa M2 clasa aXI a

Andronic Aurica Mihaela
Liceul Tehnologic ”Nicanor Moroșan” Pârteștii de Jos, jud. Suceava

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-3 \end{pmatrix}$, $x \in R$. Se notează $A^n = \underbrace{A \cdot ... \cdot A}_{denori}$, $n \in N^*$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   a) Să se determine *x* ştiind că $\det(A) = 0$.
   b) Să se verifice egalitatea $A^2 = (x-2)A - (x^2 - 6x + 8) \cdot I_2$.
   c) Să se determine $x \in R$ pentru care $A^2 = 2A$.
2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   a) Să se caclueze matricea B^2, unde $B^2 B \cdot B$.
   b) Să se verifice că $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.
   c) Să se arate că $C^4 = 6^4 \cdot I_2$, unde $C = B^2 + A^{-1}$ şi $C^4 = C \cdot C \cdot C \cdot C$.
3. Se consideră matriecea $A=\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \in M_2(R)$. Se notează $A^n = \underbrace{A \cdot ... \cdot A}_{denori}$, $n \in N^*$.
   a) Să se calculeze determinantul matricei *A*.
   b) Să se arate că $A^2 + A^3 = O_2$.
   c) Să se calculeze suma $A + 2 \cdot A^2 + ... + 10 \cdot A^{10}$.
4. Se consideră matriecele $X = (x \quad y), A=\begin{pmatrix} a & 9 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ cu $a, x, y \in R$ şi $B = (0 \quad 0)$.
   a) Să se arate că dacă $X \cdot A = B$, atunci $(a^2 - 9)x = 0$.
   b) Să se determine valorile reale ale numărului *a* pentru care determinantul matricei A este nenul.
   c) Să se determine trei soluţii distincte ale sistemului de ecuaţii $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 9x + 3y = 0 \end{cases}$.
5. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(R)$.
   a) Să se calculeze $A^2 + A$, unde $A^2 = A \cdot A$..
   b) Ştiind că $A^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\forall n \in N$, $n \geq 2$ şi $A^n = \underbrace{A \cdot ... \cdot A}_{denori}$, să se rezolve ecuaţia $\det(A^n) = 2 \cdot 5^n - 125$.
   c) Să se determine matricea $B = A + A^2 + ... + A^{2008}$.

6. Se consideră matriecele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ în $M_2(R)$.
   a) Să se verifice că $AB=BA$.
   b) Să se calculeze A^2+B^2, unde $A^2=A\cdot A$. şi $B^2=B\cdot B$.
   c) Să se arate că $C^4=5^4\cdot I_2$, unde $C=A+B$ şi $C^4=C\cdot C\cdot C\cdot C$.
7. Se consideră mulţimea $G=\left\{A=\begin{pmatrix}a+b & b\\ -b & a-b\end{pmatrix}\middle| a,b\in Z, a^2=1\right\}$.
   a) Să se verifice dacă matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi respectiv $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ aparţin mulţimii G.
   b) Să se determine matricea $B\in M_2(Z)$ astfel încât $\begin{pmatrix}a+b & b\\ -b & a-b\end{pmatrix}=aI_2+bB,\ \forall a,b\in Z$.
   c) Să se demonstreze că inversa oricărei matrice din G este tot o matrice din G.
8. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ şi funcţia $f:M_3(R)\to M_3(R)$, $f(X)=X^2-3X+I_3$, unde $X^2=X\cdot X$.
   a) Să se calculeze $\det(I_3+B)$.
   b) Să se demosntreze că $f(A)=I_3+B$.
   c) Să se arate că $(f(A))^3=I_3+3B+3B^2$, unde $(f(A))^3=f(A)\cdot f(A)\cdot f(A)$.
9. Se consideră matricele $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ a & b\end{pmatrix}$, unde $a,b\in Z$.
   a) Să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A$..
   b) Să se verifice că $A^2=aI_2+bA$, unde $A^2=A\cdot A$..
   c) Ştiind că $X\in M_2(Z)$ cu $AX=XA$, să se arate că există $m,n\in Z$ astfel încât $X=mI_2+nA$.
10. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ şi $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.
    a) Să se calculeze A^2, unde $A^2=A\cdot A$..
    b) Să se verifice că $AB-2B=O_2$.
    c) Să se determine matricele $X\in M_2(R)$ care verifică egalitatea $AXB=O_2$.
11. Se consideră mulţimea $M=\{aI_2+bV\mid a,b\in R\}$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $V=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.
    a) Să se verifice că $I_2\in M$.
    b) Să se determine matricele inversabile din mulţimea M în raport cu operaţia de înmulţire din $M_2(R)$.
    c) Ştiind că $A,B\in M$, să se arate că $AB\in M$.

12. În mulţimea $M_2(R)$ notăm cu A^t transpusa matricei A.

a) Să se calculeze $I_2 + I_2^t$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Să se demonstreze că pentru $\forall A \in M_2(R)$ şi $m \in R$ are loc relaţia $(mA)^t = mA^t$.

c) Să se determine matricele $A \in M_2(R)$ pentru care $A + A^t = O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

13. Se consideră mulţimea $M = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 2a & -a \\ 2a & -a \end{pmatrix} \middle| a \in R \right\}$. Pentru $A \in M$ se notează $A^n = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{de\ n\ ori}$, unde $n \in N^*$.

a) Să se arate că $(A(a))^2 = aA(a), \ \forall a \in R$.

b) Să se arate că dacă $X, Y \in M$, atunci $XY \in M$.

c) Să se determine $a \in R$ astfel încât $(A(a))^2 + (A(a))^3 = 2A(a)$.

14. Se consideră mulţimea $M = \left\{ A(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \middle| a, b \in R \right\}$ şi matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze determinantul matriciei $A(1;1)$.

b) Să se demonstreze că dacă $A, B \in M$, atunci $A + B \in M$.

c) Să se arate că $\det(I_2 - A(0,b)) \neq 0, \ \forall b \in R$.

15. Fie funcţia $f : M_2(R) \to M_2(R)$ definită prin $f(A) = A + A^t$, unde A^t este traspusa matricei A.

a) Să se calculeze $f(I_2)$.

b) Să se demontreze că $(A+B)^t = A^t + B^t, \ \forall A, B \in M_2(R)$.

c) Să se determine matricele $A \in M_2(R)$ pentru care $f(A) = O_2$, unde $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

.

16. Se consideră mulţimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in R \right\}$ şi matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se arate că $I_2 \in M$.

b) Ştiind că $A, B \in M$, să se arate că $A + B \in M$.

c) Să se demonstreze că $\det(AB - BA) \geq 0, \ \forall A, B \in M$.

17. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice că $A^2, = 2I_2$, unde $A^2 = A \cdot A.$.

b) Să se determine $x \in R$ astfel încât $\det(A - xI_2) = 0$.

c) Să se rezolve în $M_2(R)$ ecuaţia $AX = XA$.

18. Se consideră matricele $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ din $M_2(R)$. Se notează cu A^t transpusa matricei A.

a) Ştiind că $ad = 4$ şi $bc = 3$, să se calculeze $\det(A)$.

b) Să se calculeze $A \cdot A^t$.

c) Să se demonstreze că dacă suma elementelor matricei $A \cdot A^t$ este egală cu 0, atunci $\det(A) = 0$.

19. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ din $M_2(R)$. Se notează $A^2 = A \cdot A$..

a) Să se calculeze A^2.

b) Să se verifice că $A^2 = (a+d)A - (ad - bc)I_2$.

c) Ştiind că $a + d \neq 0$ şi $M \in M_2(R)$ cu $A^2M = MA^2$, să se demonstreze că $AM = MA$.