**Probleme recapitulative pentru clasa a X-a**

**Prof. Rusu Carmen**

**Liceul Teologic Penticotal BETEL Oradea**

**1)** a) Arătaţi că numărul $n=\sqrt[3]{1331}+\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2018}+\sqrt{2019}}-\sqrt{2019}$ este natural.

b) Demonstraţi că expresia $E=\frac{\log_5 x+\log_{25} x+\log_{0,2} x}{\log_3 x+\log_{\sqrt[3]{9}} x+\log_{0,(3)} x}$ nu depinde de $x$, unde $x>0, x\neq 1$.

**Rezolvare:**

a) $\sqrt[3]{1331}=11$.

După raţionalizarea numitorilor $n=11-1+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\cdots-\sqrt{2018}+\sqrt{2019}-\sqrt{2019}$

Finalizare $n=10\in\mathbb{N}$.

b) $E=\frac{(1+\frac{1}{2}-1)\log_5 x}{(1+\frac{3}{2}-1)\log_3 x}$. Apoi rezultă $E=\frac{1}{3}\log_5 3$.

**2)** Un cercetător în ştiinţe medicale este în căutarea unui tratament pentru un virus. Pentru aceasta el recoltează o probă ce conţine un număr de $10^7$ celule contaminate şi observă că acestea se multiplică de 2,5 ori la un interval de 15 minute.

a) Câte celule vor fi după o oră şi jumătate?

b) Dacă se aplică o substanţă de tratament, se constată că numărul celulelor contaminate se micşorează de 5 ori într-un interval de 20 de minute. Folosind numărul de celule de la punctul a), calculaţi câte astfel de celule vor rămâne după 4 ore de la aplicarea substanţei de tratament.

**Rezolvare:**

a) Într-o oră şi jumătate avem 6 intervale de 15 minute. De unde rezultă $10^7\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^6=2\cdot 5^{13}$

b) În 4 ore avem 12 intervale de 20 de minute. De aici avem $2\cdot 5^{13}\cdot 5^{-12}=10$.

**3)** Fie numerele $a,b,c>0$ cu proprietatea: $\frac{4}{\sqrt{a}}=\frac{3}{\sqrt{b}}=\frac{2}{\sqrt{c}}$.

a) Comparaţi numerele $a,b,c$.

b) Calculaţi $\frac{\sqrt{a+b+c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$.

**Rezolvare:**

a) $\frac{4}{\sqrt{a}}=\frac{3}{\sqrt{b}}=\frac{2}{\sqrt{c}}=\frac{1}{k}\ cu\ k>0$, atunci avem $a=16k^2,\ b=9k^2,\ c=4k^2$. Atunci $a>b>c$

b) Avem $\frac{\sqrt{a+b+c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{16k^2+9k^2+4k^2}}{4k+3k+2k}$. Rezultatul final este $\frac{\sqrt{29}}{9}$

**4)** Fie numărul $a$ care verifică egalitatea $2^a=3$.

a) Arătaţi că $32^{\frac{5-3a}{5}}=\frac{32}{27}$.

b) Exprimaţi, în funcţie de $a$, $\log_{18}\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}$.

**Rezolvare:**

a) Din ipoteză rezultă: $a=\log_2 3$. Atunci avem $32^{\frac{5-3a}{5}}=\frac{32}{(2^5)^{\frac{3}{5}\log_2 3}}=\frac{32}{3^3}$.

b) Transformăm astefel: $\log_{18}\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}=\frac{\log_2\left(\frac{2^{2,5}}{3^{0,(3)}}\right)}{\log_2(2\cdot 3^2)}$. Atunci rezultă $\frac{\frac{5}{2}-\frac{a}{3}}{1+2a}=\frac{15-2a}{12a+6}$.

**5)** $a=\sqrt{31+8\sqrt{15}},\ \ b=\sqrt{31-8\sqrt{15}},\ \ c=\sqrt[3]{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ și $d=\log_2\left(\frac{a+b}{ab}\right)$.

a) Arătați că $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=8$

b) Calculați numerele $c$ și $d$

c) Ordonați crescător numerele $a, b, c$ și $d$.

**Rezolvare:**

a) După calculul celor două numere obținem $a=4+\sqrt{15}$ și $b=4-\sqrt{15}$ și atunci ovem rezultatul din concluzie $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=8$.

b) $c=\sqrt[3]{8}=2;\ d=\log_2 8=3$

c) $a=4+\sqrt{15}>7$ și $b=4-\sqrt{15}<1$ de unde rezultă $b<c<d<a$.

**6)** a) Calculați: $[0,(3)]^3\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{0,5}:9^{-\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{17}{6}}$

b) Logaritmați expresia: $E=\frac{3ab^2}{4\sqrt[3]{a^4b}}$, unde $a,b>0$.

**Rezolvare:**

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot(3^{-3})^{\frac{1}{2}}:(3^2)^{-\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{17}{6}}=3^{-1}=\frac{1}{3}$

b) (Logaritmarea expresiei se poate face în orice bază)

$\lg E = \lg(3ab^2) - \lg\left(4\sqrt[3]{a^4 b}\right)$ de unde avem: $\lg E = \lg 3 - \lg 4 - \frac{1}{3}\lg a + \frac{5}{3}\lg b$

**7)** Fie numerele $x = \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \ldots \cdot \log_{29} 30$ și

$$y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{2}{3} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{4} + \cdots + \log_{\frac{1}{3}} \frac{242}{243}$$

a) Determinați numerele întregi consecutive $m$ și $n$ pentru care $m < x < n$

b) Comparați numerele $x$ și $y$.

**Rezolvare:**

a) $x = \log_2 30$. Rezultă atunci că $4 < x < 5 \implies m = 4$ și $n = 5$

b) $y = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{242}{243}\right) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{243} = 5$. Din a) $\Rightarrow$ $x < y$

**8)** Fie mulțimile $A = \left\{x \in \mathbf{N} \,/\, \sqrt{\frac{225}{2x+1}} \in \mathbf{N}\right\}$ și $B = \left\{x \in \mathbf{Z} \,/\, \sqrt[3]{x - 12} \in \mathbf{Z}\right\}$. Determinați $A \cap B$.

**Rezolvare:**

$\sqrt{\frac{225}{2x+1}} \in \mathbf{N} \Leftrightarrow 2x + 1 \in \{1; 9; 25; 225\}$. De aici obținem $x \in \{0; 4; 12; 112\} \Rightarrow A = \{0; 4; 12; 112\}$.

Valorile lui $x \in \boldsymbol{A}$ pentru care $\sqrt[3]{x - 12} \in \mathbf{Z}$ sunt $x = 4$ și $x = 12 \Rightarrow A \cap B = \{4; 12\}$.