O metodă pentru demonstrarea unor inegalități

Prof. Mădălina Enache,

Liceul Tehnologic ''Virgil Madgearu", Roșiorii de Vede

Metoda prezentată în cele ce urmează poate constitui un exemplu de aplicare a derivatei și a tangentei la graficul unei funcții în demonstrarea unor inegalități.

Exemplul 1.

Fie a,b,c,d $\in (0,\infty)$ astfel încât a+b+c+d=1. Demonstrați că :

$$6(a^3+b^3+c^3+d^3)\geq a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8}.$$

Soluție:

Considerăm funcția $f:(0,1)\to R,\ f(x)=6x^3-x^2$. Funcția f este derivabilă pe (0,1) fiind o funcție polinomială de gradul 3.

Rezultă că $f'(x)=18x^2-2x$. Cum $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{32}$, iar $f'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{8}$, se obține că ecuația tangentei la graficul funcției f în $x=\frac{1}{4}$ este $y=\frac{5x-1}{8}$.

Cum $f(x)\geq\frac{5x-1}{8}$ <=> $48x^3-8x^2-5x+1\geq 0$ <=> $(4x-1)^2(3x+1)\geq 0$, pentru orice $x\in(0,1)$ (graficul funcției f este situat deasupra tangentei duse în punctul de abscisă $\frac{1}{4}$).

Rezultă că f(a)+f(b)+f(c)+f(d) $\geq\frac{5(a+b+c+d)-4}{8}=\frac{1}{8}$, adică

$$6a^3-a^2+6b^3-b^2+6c^3-c^2+6d^3-d^2\geq\frac{1}{8} \iff 6(a^3+b^3+c^3+d^3)\geq a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8}.$$

Observație:

Cum f''(x)=36x-2 rezultă că funcția nu e convexă pe întreg intervalul (0,1).

Exemplul 2:

Fie a,b,c >0. Demonstrați că :

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+a+c)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leq 8.$$

Soluție:

Notăm S = a+b+c . Obținem $\sum \frac{(a+S)^2}{2a^2+(S-a)^2} \leq 8 \iff \sum \frac{(\frac{a}{S}+1)^2}{2(\frac{a}{S})^2+(1-\frac{a}{S})^2} \leq 8$.

$$\frac{a}{S}, \frac{b}{S}, \frac{c}{S} \in (0,1) \quad \text{și} \quad \frac{a}{S}+\frac{b}{S}+\frac{c}{S}=1.$$

Prin urmare putem considera a+b+c=1 înlocuind $\frac{a}{S}, \frac{b}{S}, \frac{c}{S}$ cu a, b, c.

Inegalitatea devine: $\sum \frac{(a+1)^2}{2a^2+(1-a)^2} \leq 8$, unde a+b+c=1 .

Considerăm funcția $f:(0,1) \to R,\ f(x) = \frac{(x+1)^2}{2x^2+(1-x)^2}$ .Funcția f este derivabilă pe (0,1) fiind o funcție rațională și

$$f'(x)=\frac{4(-2x^2-x+1)}{(3x^2-2x+1)^2}, \quad f'(\frac{1}{3}) = 2, \ f(\frac{1}{3}) = \frac{8}{3} .$$

Ecuația tangentei la grafic în punctul de abscisă $x=\frac{1}{3}$ este $y = \frac{12x+4}{3}$.

Vom demonstra că $f(x) \leq \frac{12x+4}{3}$, pentru orice $x \in (0,1)$.

Inegalitatea de mai sus este echivalentă cu

$36x^3-15x^2-2x+1 \geq 0 \iff (3x-1)^2(4x+1) \geq 0$ pentru orice $x \in (0,1)$.

Prin urmare $f(a)+f(b)+f(c) \leq \frac{12(a+b+c)+12}{3} = 8$

Exemplul 3.

Fie $a,b,c \in (0,\infty)$. Arătați că

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c))^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5} .$$

Soluție:

Ca și în exemplul anterior, putem considera a+b+c=1, $a,b,c \in (0,1)$ și astfel inegalitatea ce trebuie demonstrată devine :

$$\sum \frac{(1-2a)^2}{(1-a)^2+a^2} \geq \frac{3}{5} \iff \sum 2 - \frac{2}{1+(1-2a)^2} \geq \frac{3}{5} .$$

Notăm : $x_1=1-2a$, $x_2=1-2b$, $x_3=1-2c$.

Avem ca $x_1+x_2+x_3=1$ și $x_1, x_2, x_3 \in (-1,1)$. Inegalitatea devine :

$$\frac{1}{1+x_1^2} + \frac{1}{1+x_2^2} + \frac{1}{1+x_3^2} \leq \frac{27}{10} \quad (*)$$

Considerăm $f:(-1,1) \to R$, $(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

f este o funcție rațională, deci derivabilă și avem :

$$f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2} \ , \ f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{10} \ , \ f'\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{27}{50} \ .$$

Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=\frac{1}{3}$ este $y = \frac{-27x+54}{50}$.

Se demonstrează că $f(x) \leq \frac{-27x+54}{50}$, pentru orice $x \in (-1,1)$ (deoarece se ajunge la $(3x-1)^2(4-3x) \geq o$).

Deci $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \leq \frac{-27(x_1+x_2+x_3)+162}{50} = \frac{135}{50} = \frac{27}{10}$ și deci inegalitatea (*) este demonstrată.

Bibliografie

Using Tangent Lines to Prove Inequalities, Kin-Yin Li, Mathematical Excalibur, Vol.10, No 5.