Prof. MESTECAN CORNELIA

Liceul Tehnologic "ALEXANDRU BORZA"

CLUJ-NAPOCA

SEMNUL FUNCŢIEI DE GRADUL II ŞI APLICAŢIE DIRECTĂ: INECUAŢIA DE GRADUL II

FIŞĂ DE LUCRU_Clasa a IX-a liceu tehnologic

A. Breviar teoretic_ SEMNUL FUNCŢIEI DE GRADUL II

Funcţia de gradul II este $f:R\to R, f(x)=ax^2+bx+c, a,b,c\in R, a\neq 0$

1. Când $\Delta>0$ funcţia de gradul II are două rădăcini reale şi diferite , acestea fiind de fapt soluţiile ecuaţiei $f(x)=0 \Leftrightarrow ax^2+bx+c=0,\ x_1\neq x_2$

Le scriem în **tabelul de semn** în ordine crescătoare

Presupunem că $x_1<x_2$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$	semnul lui ***a***		0	semnul opus lui ***a***	0	semnul lui ***a***	

Prin urmare când $\Delta>0$ funcţia de gradul II are semnul lui *a* înafara rădăcinilor şi semnul opus lui *a* între rădăcini

2. Când $\Delta=0$ funcţia de gradul II are două rădăcini reale şi egale , acestea fiind de fapt soluţiile ecuaţiei $f(x)=0\Leftrightarrow ax^2+bx+c=0,\ x_1=x_2$

Tabelul de semn este

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$f(x)$	semnul lui ***a***		0	semnul lui ***a***	

Prin urmare când $\Delta=0$ funcţia de gradul II are semnul lui *a* peste tot, mai puţin în x_1 unde este 0

3. Când $\Delta<0$ funcţia de gradul II nu are rădăcini reale, respetiv ecuaţia de gradul II nu are soluţii reale

Tabelul de semn este

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	semnul lui ***a***	

Prin urmare când $\Delta<0$ funcţia de gradul II are semnul lui *a* peste tot

Exerciţiu rezolvat

1). Să se stabilească semnul funcţiei $f:R\to R, f(x)=x^2-5x+4$

Ataşăm ecuaţia $x^2-5x+4=0$, $a=1, b=-5, c=4$

$\Delta= b^2-4ac \Leftrightarrow \Delta= (-5)^2-4\cdot 1\cdot 4 \Leftrightarrow \Delta= 25-16=9>0$ deci x_1, x_2 sunt reale şi diferite

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x_1=\frac{-(-5)-\sqrt{9}}{2\cdot 1} \Leftrightarrow x_1=\frac{5-3}{2} \Leftrightarrow x_1=\frac{2}{2}=1$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x_2=\frac{-(-5)+\sqrt{9}}{2\cdot 1} \Leftrightarrow x_2=\frac{5+3}{2} \Leftrightarrow x_1=\frac{8}{2}=4$

Tabelul de semn. Observăm că $a=1>0$ deci funcţia are semnul lui ***a*** , adică $+$ înafara rădăcinilor şi semnul opus lui ***a*** adică $-$ între rădăcini

x	$-\infty$			1			4			$+\infty$
$f(x)$		$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$	

Din tabel tragem concluzia că $f(x)>0$ pentru $x\in(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$ şi

$$f(x)>0 \quad \text{pentru } x\in(1,4)$$

Exerciţii propuse spre rezolvare:

2). Să se stabilească semnul funcţiei $f:R\to R, f(x)=x^2-3x+2$

3). Să se stabilească semnul funcţiei $f:R\to R, f(x)=-x^2+5x-6$

Exerciţiu rezolvat

4). Să se stabilească semnul funcţiei $f:R\to R, f(x)=-9x^2+6x-1$

Ataşăm ecuaţia $-9x^2+6x-1=0$, $a=-9, b=6, c=-1$

$\Delta= b^2-4ac \Leftrightarrow \Delta= 6^2-4\cdot(-9)\cdot(-1) \Leftrightarrow \Delta= 36-36=0$ deci x_1, x_2 sunt reale şi egale

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x_1=\frac{-6-\sqrt{0}}{2\cdot(-9)} \Leftrightarrow x_1=\frac{-6}{-18} \Leftrightarrow x_1=\frac{1}{3}$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x_2=\frac{-6+\sqrt{0}}{2\cdot(-9)} \Leftrightarrow x_2=\frac{-6}{-18} \Leftrightarrow x_2=\frac{1}{3}$

Observaţie: cum $\Delta=0$ adică $\sqrt{\Delta}=0$ soluţiile se pot calcula şi cu $x_1=x_2=\frac{-b}{2a}=\frac{-6}{2\cdot(-9)}=\frac{-6}{-18}=\frac{1}{3}$

Tabelul de semn. Observăm că $a=-9<0$ deci funcţia are semnul lui ***a*** peste tot, adică $-$, mai puţin în $x_1=\frac{1}{3}$ unde este 0

x	$-\infty$			$\frac{1}{3}$			$+\infty$
$f(x)$		$-$	$-$	0	$-$	$-$	

Din tabel tragem concluzia că $f(x) < 0$ pentru $x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right) = R - \left\{\frac{1}{3}\right\}$

Exerciţii propuse spre rezolvare:

5). Să se stabilească semnul funcţiei $f: R \to R, f(x) = -x^2 + 2x - 1$

6). Să se stabilească semnul funcţiei $f: R \to R, f(x) = 4x^2 + 4x + 1$

Exerciţiu rezolvat

7). Să se stabilească semnul funcţiei $f: R \to R, f(x) = 2x^2 + 3x + 5$

Ataşăm ecuaţia $2x^2 + 3x + 5 = 0$, $a = 2, b = 3, c = 5$

$\Delta = b^2 - 4ac \Leftrightarrow \Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 \Leftrightarrow \Delta = 9 - 40 = -31 < 0$ deci x_1, x_2 nu sunt reale

Tabelul de semn. Observăm că $a = 2 > 0$**,** prin urmare funcţia are semnul lui ***a*** peste tot, adică +

x	$-\infty$				$+\infty$
$f(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	

Din tabel tragem concluzia că $f(x) > 0$ pentru $x \in (-\infty, +\infty) = R$

Exerciţii propuse spre rezolvare:

8). Să se stabilească semnul funcţiei $f: R \to R, f(x) = 2x^2 - x + 7$

9). Să se stabilească semnul funcţiei $f: R \to R, f(x) = -x^2 + 4x - 5$

B. Breviar teoretic_ INECUAŢIA DE GRADUL II

Inecuaţia de gradul II $ax^2 + bx + c \leq 0$ $(\geq 0, < 0, > 0)$, $a, b, c \in R, a \neq 0$

Rezolvarea inecuaţiei de gradul II se rezolvă cu ajutorul semnului funcţiei de gradul II

$f: R \to R, f(x) = ax^2 + bx + c$

Etape în rezolvare:

I. Ataşăm ecuaţia de gradul II $ax^2 + bx + c = 0$ şi o rezolvăm
II. Realizăm tabelul cu semnul funcţei de gradul II corespunzătoare
III. Din tabel alegem şi scriem soluţia inecuaţiei

Exerciţiu rezolvat:

10). Să se rezolve inecuaţia în mulţimea numerelor reale: $x^2+5x-14\leq 0$

Rezolvare:

I.Ataşăm ecuaţia şi o rezolvăm $x^2+5x-14=0$, $a=1, b=5, c=-14$

$\Delta= b^2-4ac$, $\Delta= 5^2-4\cdot 1\cdot(-14)$, $\Delta= 25+56$, $\Delta= 81>0$ rezultă că $x_1, x_2\in R$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\Leftrightarrow x_1=\frac{-5+\sqrt{81}}{2\cdot 1}\Leftrightarrow x_1=\frac{-5+9}{2}\Leftrightarrow x_1=\frac{4}{2}=2$

$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\Leftrightarrow x_2=\frac{-5-\sqrt{81}}{2\cdot 1}\Leftrightarrow x_2=\frac{-5-9}{2}\Leftrightarrow x_2=-\frac{14}{2}=-7$

II. Tabelul de semn pentru funcţia $f: R\to R, f(x)=x^2+5x-14$

Cum $\Delta>0$ funcţia *f* are semn opus lui *a* între rădăcini şi semnul lui *a* înafara lor

$a=1>0$ şi $-7<2$

x	$-\infty$		-7		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

III. Citim tabelul şi alegem soluţia: avem de rezolvat inecuaţia $x^2+5x-14\leq 0\Leftrightarrow f(x)\leq 0$ observăm în tabel că $f(x)\leq 0$ pentru $x\in[-7;2]$ (paranteze pătrate pentru că inegalitatea este cu egal).

Deci soluţia inecuaţiei este $S=[-7;2]$

Exerciţii propuse spre rezolvare:

11). Să se rezolve inecuaţiile în mulţimea numerelor reale: a) $x^2-7x+10>0$; b) $-2x^2+3x-1\leq 0$; c) $3x^2-x-10<0$

Exerciţiu rezolvat:

12). Să se rezolve inecuaţia în mulţimea numerelor reale: $4x^2-3x+5\leq 0$

Rezolvare:

I. Ataşăm ecuaţia şi o rezolvăm

$4x^2-3x+5=0$, $a=4, b=-3, c=5$

$\Delta= b^2-4ac\Leftrightarrow \Delta= (-3)^2-4\cdot(-3)\cdot 5\Leftrightarrow \Delta= 9-60=-51<0$ deci x_1, x_2 nu sunt reale

II. Tabelul de semn pentru funcţia $f: R \to R, f(x) = 4x^2 - 3x + 5$

Cum $\Delta < 0$ funcţia *f* are semnul lui ***a*** peste tot, $a = 4 > 0$

x	$-\infty$			$+\infty$
$f(x)$	+	+	+	+

III. Citim tabelul şi alegem soluţia: avem de rezolvat inecuaţia $4x^2 - 3x + 5 \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0$ observăm în tabel că $f(x) > 0$ pentru $x \in (-\infty, +\infty) = R$, adică nu este niciunde negativă.

Deci soluţia inecuaţiei este $S = \emptyset$ (mulţimes vidă)

Observaţie :

-dacă inecuaţia era $4x^2 - 3x + 5 > 0$, atunci din tabel rezulta că $S = (-\infty, +\infty) = R$

Exerciţii propuse spre rezolvare:

13). Să se rezolve inecuaţiile în mulţimea numerelor reale: a) $-x^2 + x - 3 > 0$, b) $x^2 - x + 1 > 0$

Exerciţiu rezolvat

14). Să se rezolve inecuaţia în mulţimea numerelor reale: $-25x^2 + 10x - 1 < 0$

Rezolvare:

I.Ataşăm ecuaţia şi o rezolvăm

$-25x^2 + 10x - 1 = 0$, $a = -25, b = 10, c = -1$

$\Delta = b^2 - 4ac \Leftrightarrow \Delta = 10^2 - 4 \cdot (-25) \cdot (-1) \Leftrightarrow \Delta = 100 - 100 = 0$ deci x_1, x_2 sunt reale şi egale

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x_1 = \frac{-10-\sqrt{0}}{2\cdot(-25)} \Leftrightarrow x_1 = \frac{-10}{-50} \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{5}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x_2 = \frac{-10+\sqrt{0}}{2\cdot(-25)} \Leftrightarrow x_2 = \frac{-10}{-50} \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{5}$

Observaţie: cum $\Delta = 0$ adică $\sqrt{\Delta} = 0$ soluţiile se pot calcula şi cu $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2\cdot(-25)} = \frac{-10}{-50} = \frac{1}{5}$

II. Tabelul de semn pentru funcţia $f: R \to R, f(x) = -25x^2 + 10x - 1$

Cum $\Delta = 0$ funcţia *f* are semnul lui a peste tot, mai puţin în rădăcini în care este 0, $a = -25 < 0$

x	$-\infty$			$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	$-$	0	$-$	$-$

III. Citim tabelul şi alegem soluţia: avem de rezolvat inecuaţia $-25x^2+10x-1<0 \Leftrightarrow f(x)<0$ observăm în tabel că $f(x)<0$ pentru $x\in\left(-\infty,\frac{1}{5}\right)\cup\left(\frac{1}{5},+\infty\right)$, adică peste tot mai puţin în $\frac{1}{5}$ unde este 0. Nu luăm şi $\frac{1}{5}$ pentru că $f(x)<0$ este inegalitate strictă, fără egal.

Deci soluţia inecuaţiei este $S=\left(-\infty,\frac{1}{5}\right)\cup\left(\frac{1}{5},+\infty\right)=R-\left\{\frac{1}{5}\right\}$

Observaţii :

-dacă inecuaţia era $-25x^2+10x-1\leq 0$, atunci din tabel rezulta că $S=(-\infty,+\infty)=R$

-dacă inecuaţia era $-25x^2+10x-1\geq 0$, atunci soluţia era $S=\left\{\frac{1}{5}\right\}$ pentru că în tabel funcţia *f* nu este niciunde pozitivă dar este egală cu 0 în $\frac{1}{5}$

-dacă inecuaţia era $-25x^2+10x-1>0$, atunci soluţia era $S=\emptyset$

Exerciţii propuse spre rezolvare:

15). Să se rezolve inecuaţiile în mulţimea numerelor reale: a) $-x^2+4x-4>0$; b) $x^2-2x+1>0$; c) $-x^2+6x-9\leq 0$.

Exerciţiu rezolvat

16). Fie funcţiile $f,g\colon R\to R, f(x)=x^2+4x-15, g(x)=-2x^2+2x-10$

Să se determine valorile reale ale lui *x* pentru care $f(x)\geq g(x)$.

Rezolvare:

$f(x)\geq g(x)\Leftrightarrow x^2+4x-15\geq -2x^2+2x-10\Leftrightarrow x^2+4x-15+2x^2-2x+10\geq 0$

$\Leftrightarrow 3x^2+2x-5\geq 0$

atasăm ecuaţia de gradul II: $3x^2+2x-5=0$, $a=3,b=2,c=-5$

$\Delta=b^2-4ac \Leftrightarrow \Delta=2^2-4\cdot 3\cdot(-5)\Leftrightarrow\Delta=4+60=64$ deci x_1,x_2 sunt reale şi diferite

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x_1=\frac{-2-\sqrt{64}}{2\cdot 3}\Leftrightarrow x_1=\frac{-2-8}{6}\Leftrightarrow x_1=\frac{-10}{6}=-\frac{5}{3}$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x_2 = \frac{-2-\sqrt{64}}{2\cdot 3} \Leftrightarrow x_2 = \frac{-2+8}{6} \Leftrightarrow x_2 = \frac{6}{6} = 1$

Tabelul de semn : Cum $\Delta > 0$ funcţia *f* are semn opus lui *a* între rădăcini şi semnul lui *a* înafara lor

$a = 3 > 0$ şi $-\frac{5}{3} < 1$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		1		$+\infty$
$3x^2+2x-5$	+	+	0	−	0	+	+

Citim tabelul şi alegem soluţia: avem de rezolvat inecuaţia $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow 3x^2+2x-5 \geq 0$

observăm în tabel că $3x^2+2x-5 \geq 0$ pentru $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right] \cup [1, +\infty)$]

Deci soluţia inecuaţiei $f(x) \geq g(x)$ este $S = \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right] \cup [1, +\infty)$.

Exerciţii propuse spre rezolvare:

17). Fie funcţiile $f, g: R \to R, f(x) = -3x^2 - 2x + 7, g(x) = -4x^2 + 2x + 12$

Să se determine valorile reale ale lui x pentru care $f(x) < g(x)$.

18). Fie funcţiile $f, g: R \to R, f(x) = 2x^2 + 5x - 3, g(x) = -2x + 1$

Să se determine valorile reale ale lui x pentru care $f(x) \geq g(x)$.

Exerciţiu rezolvat

19). Se consideră funcţia $f: R \to R, f(x) = x^2 - (m+2)x + 5$.

a) Să se determine semnul funcţiei f pentru $m = 4$

b) Pentru $m = -7$ să se rezolve inecuaţia $f(x) \leq f(-1)$

Rezolvare:

Pentru $m = 4$ funcţia devine $f: R \to R, f(x) = x^2 - 6x + 5$

Ataşăm ecuaţia: $x^2 - 6x + 5 = 0$, $a = 1, b = -6, c = 5$

$\Delta = b^2 - 4ac \Leftrightarrow \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 \Leftrightarrow \Delta = 36 - 20 = 16$ deci x_1, x_2 sunt reale şi diferite

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x_1 = \frac{-(-6)-\sqrt{16}}{2\cdot 1} \Leftrightarrow x_1 = \frac{6-4}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{2}{2} = 1$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x_2 = \frac{-(-6)+\sqrt{16}}{2\cdot 1} \Leftrightarrow x_2 = \frac{6+4}{2} \Leftrightarrow x_2 = \frac{10}{2} = 5$

Tabelul de semn : Cum $\Delta > 0$ funcţia *f* are semn opus lui *a* între rădăcini şi semnul lui *a* înafara lor

$a = 1 > 0$ şi $1 < 5$

x	$-\infty$			1		5			$+\infty$
$f(x)$		$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	

Din tabel tragem concluzia că $f(x) > 0$ pentru $x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$ şi

$$f(x) > 0 \text{ pentru } x \in (1,5)$$

b) $m = -7$ înlocuim şi obţinem

$f(x) \leq f(-1) \Leftrightarrow x^2 - (-7+2)x + 5 \leq (-1)^2 - (-7+2)(-1) + 5$

$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 5 \leq 1 - 5 + 5 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 5 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 \leq 0$

Ataşăm ecuaţia: $x^2 + 5x + 4 = 0,\ a = 1, b = 5, c = 4$

$\Delta = b^2 - 4ac \Leftrightarrow \Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 \Leftrightarrow \Delta = 25 - 16 = 9$ deci x_1, x_2 sunt reale şi diferite

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x_1 = \frac{-5-\sqrt{9}}{2\cdot 1} \Leftrightarrow x_1 = \frac{-5-3}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{-8}{2} = -4$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow x_2 = \frac{-5+\sqrt{9}}{2\cdot 1} \Leftrightarrow x_2 = \frac{-5+3}{2} \Leftrightarrow x_2 = \frac{-2}{2} = -1$

Tabelul de semn : Cum $\Delta > 0$ funcţia *f* are semn opus lui *a* între rădăcini şi semnul lui *a* înafara lor

$a = 1 > 0$ şi $-4 < -1$

x	$-\infty$			-4		-1			$+\infty$
$x^2 + 5x + 4$		$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	

Din tabel rezultă că $f(x) \leq f(-1) \Leftrightarrow x^2 + 5x + 4 \leq 0$ pentru $x \in (-4, -1)$.

Deci soluţia este $S = (-4, -1)$.

Exerciţii propuse spre rezolvare:

20). Se consideră funcţia $f: R \to R, f(x) = x^2 + (m-3)x + 7$.

a) Să se determine semnul funcţiei f pentru $m = -5$

b) Pentru $m = 2$ să se rezolve inecuaţia $f(x) > f(-2)$

21). Se consideră funcţia $f: R \to R, f(x) = 2x^2 - (m-1)x + 3$.

a) Să se determine semnul funcţiei f pentru $m = -4$

b) Pentru $m = -5$ să se rezolve inecuaţia $f(x) < f(1)$