Despre ecuația de gradul IV

Prof. Paul Enache

Colegiul Național „Anastasescu’’, Roșiorii de Vede

Cea mai cunoscută metodă de rezolvare a unei ecuații de gradul IV este metoda lui Ferrari. Voi prezenta în continuare o metodă mai puțin cunoscută de rezolvare a unei ecuații de gradul IV.

Fie ecuația

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \text{ , unde } a, b, c, d \in R \qquad (1)$$

Să considerăm o altă ecuație de gradul IV de forma

$$(x^2 + \alpha x + \beta)^2 - p(x + \gamma)^2 = 0 \qquad (2)$$

unde $\alpha, \beta, \gamma \, și \, p$ sunt considerate necunoscute și vor fi determinate.

Ecuația (2) poate fi descompusă în produs de doi factori

$$\left[x^2 + \left(\alpha - \sqrt{p}\right)x + \beta - \sqrt{p}\gamma\right]\left[x^2 + \left(\alpha + \sqrt{p}\right)x + \beta - \sqrt{p}\gamma\right] = 0 \quad (3).$$

Pe de altă parte, efectuând ridicările la putere în ecuația (2) și ordonând apoi după puterile lui x vom avea:

$$x^4 + 2\alpha x^3 + (\alpha^2 + 2\beta - p)x^2 + 2(\alpha\beta - p\gamma)x + \beta^2 - p\gamma^2 = 0 \quad (4)$$

Egalăm coeficienții puterilor lui x din (1) și (4) și obținem:

$$2\alpha = a \qquad (5)$$

$$\alpha^2 + 2\beta - p = b \qquad (6)$$

$$2(\alpha\beta - p\gamma) = c \qquad (7)$$

$$\beta^2 - p\gamma^2 = d \qquad (8)$$

Din (5) obținem că $\alpha = \frac{a}{2}$. Înlocuind în (6) => $\beta = \frac{p + b - \frac{a^2}{4}}{2}$ (9) .

$$(7) \Leftrightarrow 2p\gamma = 2\alpha\beta - c$$

$$2p\gamma = \frac{a}{2}\left(p + b - \frac{a^2}{4}\right) - c \quad (10) .$$

Folosind din nou relația (9) îl eliminăm pe β din relația (8) și rezultă că

$$4p\gamma^2 = \left(p + b - \frac{a^2}{4}\right)^2 - 4d \qquad (11)$$

Ridicăm relația (10) la pătrat și obținem:

$$4p^2\gamma^2 = \left[\frac{a}{2}\left(p + b - \frac{a^2}{4}\right) - c\right]^2.$$

Împărțim această ultimă relație la (11) și eliminăm pe γ . Rezultă :

$$p\left[\left(p + b - \frac{a^2}{4}\right)^2 - 4d\right] = \left[\frac{a}{2}\left(p + b - \frac{a^2}{4}\right) - c\right]^2 \qquad (12)\ .$$

Notăm $\left.\begin{array}{l} m = b - \frac{a^2}{4} \\ q = p + m \end{array}\right\}$ (13) .

Efectuând calculele obținem ecuația

$$q^3 - bq^2 + (ac - 4d)q + 4md - c^2 = 0 \qquad (14)$$

Ecuația (14) este o ecuație de gradul 3 cu necunoscuta q și cu coeficienți reali, deci admite cel puțin o soluție reală q.

Dacă îl cunoaștem pe q, îl aflăm pe p din relția (13). Apoi din relațiile (9) și (10) aflăm pe $și\ \gamma$.

În acest moment putem reprezenta ecuația (1) sub forma (2) și egalăm fiecare dintre cei doi factori ai acesteia (adică avem de rezolvat două ecuații de gradul al 2-lea) . În felul acesta determinăm cele 4 rădăcini.

Exemplu

Să rezolvăm ecuația :

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 28x - 91 = 0 \quad .$$

Se obține ecuația în q :

$$q^3 - 6q^2 + 252q - 1512 = 0$$

Adică

$$q^2(q - 6) + 252(q - 6) = 0 \ .$$

Deci $q = 6 \quad => \quad p = 4$.

Apoi se obțin $\alpha = 2, \quad \beta = 3, \quad \gamma = 5$.

În final avem de rezolvat ecuația :

$$(x^2 + 2x + 3)^2 - 4(x + 5)^2 = 0 \quad <=> \quad (x^2 - 7)(x^2 + 4x + 13) = 0$$

Se obțin soluțiile $x_{1,2} = \pm\sqrt{7}$, $x_{3,4} = -2 \pm 3i$.

Bibliografie :

1 Kulkarni , R.G (2009) , A New Method for Solving Quartics , International Journal of Mathematical Science Education , Vol.2, 24-26 .

2. www.wikipedia.org