EVALUARE SCRISĂ SEMESTRIALĂ LA MATEMATICĂ
Clasa a XI-a, Semestrul I
Profilul real, Specializarea matematică – informatică

Cristian CIOBĂNESCU
Colegiul Național *Gheorghe Lazăr*

- *Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.*
- *Timpul de lucru efectiv este de 100 de minute.*

SUBIECTUL I (Algebră) **(45 de puncte)**

1. Considerăm matricea $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 6\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$.

a) (5p) Să se determine matricea $B\in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A=3I_3+B$.

b) (10p) Să se determine A^n, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Considerăm permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\in S_4$.

a) (5p) Să se calculeze σ^{2019}.

b) (10p) Să se determine permutările $X\in S_4$ cu proprietatea că $\sigma X=X\sigma$.

3. Considerăm matricele $A=\begin{pmatrix}10 & 20 & 30\\ 20 & 30 & 10\\ 30 & 10 & 20\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}a_n & a_{n+1} & a_{n+2}\\ a_{n+3} & a_{n+4} & a_{n+5}\\ a_{n+6} & a_{n+7} & a_{n+8}\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$.

a) (5p) Să se demonstreze că nu există matrice $X\in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $X^{2020}=A$.

b) (10p) Dacă $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică de rație r, să se calculeze $detB$.

SUBIECTUL al II-lea (Analiză matematică) **(45 de puncte)**

1. Considerăm șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1=\sqrt{2}$ *și* $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$, oricare ar fi $n\geq 1$.

a) (5p) Să se demonstreze că $a_n\in(0,2)$, oricare ar fi $n\geq 1$.

b) (5p) Să se demonstreze că șirul $(a_n)_n$ este convergent.

c) (5p) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2. (10p) Să se determine $a\in(0,\infty)$ și $b\in\mathbb{R}$ pentru care $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{an^2+2bn-b}{n^2+2n+3}\right)^n=e^2$.

3. Să se calculeze limitele:

a) (5p) $\lim\limits_{n\to\infty} log_3\frac{2^n+5^n}{3^n+9\cdot 5^n}$

b) (5p) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin 1+2^2\cdot\sin 2+3^2\cdot\sin 3+\cdots+n^2\cdot\sin n}{n^5}$

c) (5p) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\ln\left(1+\sin\frac{5\pi}{3n}\right)$

d) (5p) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+5}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}$