TEST DE EVALUARE MATEMATICĂ – clasa a XII-a – POLINOAME

Profesor: ONICIUC CARMEN ELENA
Liceul Tehnologic Economic „V. Madgearu”, Iaşi

1. Fie polinomul $f \in R[X]$, $f = X^3 - X^2 - mX + 4$, $m \in R$.

a) Determinaţi $m \in R$ ştiind că $x = -1$ este rădăcină a polinomului f.

b) Determnaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la $X^2 - X + 2$ ştiind că f este divizibil cu $X - 2$.

c) Determinaţi $m \in R$ ştiind că:

$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 1, \text{ unde}$$

x_1, x_2, x_3 - sunt rădăcinile polinomului f.

d) Pentru $m = -3$ arătaţi că polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

2. Fie polinomul $f \in R[X]$, $f = X^3 - 5X^2 + 5X - 1$,

a) Arătaţi că $f(2) = -3$.

b) Arătaţi că polinomul f este divizibil cu polinomul $X - 1$.

c) Determinaţi $a \in R$ ştiind că:

$$\frac{x_1}{x_2x_3} + \frac{x_2}{x_1x_3} + \frac{x_3}{x_1x_2} = ax_1x_2x_3 \text{ , unde}$$

x_1, x_2, x_3 - sunt rădăcinile polinomului f.

d) Arătaţi că $(x_2 + x_3)(x_1 + x_3)(x_1 + x_2) = 24$.

e) Determinaţi rădăcinile polinomului f.

Barem de evaluare şi notare:

1) a) $x = -1$ rădăcină $\Rightarrow f(-1) = 0$ 0,5p

Finalizare $-1 - 1 + m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -2$ 0,5p

b) $f \vdots X - 2 \Leftrightarrow f(2) = 0 \Leftrightarrow 8 - 4 - 2m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = 4$ 0,5p

Împărţind polinomul $f = X^3 - X^2 - 4X + 4$ la $X^2 - X + 2$ obţinem câtul $c = X$ şi restul $r = -6X + 4$ 0,5p

c) Din relaţiile lui Viete obţinem

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} = 1 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a} = -m \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} = -4 \end{cases}$$ 0,5p

Deci $(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=1 \Leftrightarrow (x_1+x_2+x_3)\left(\frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{x_1x_2x_3}\right)=1$

$\Leftrightarrow 1\cdot\frac{-m}{-4}=1 \Leftrightarrow m=4$ 0.5p

d) $m=-3 \Rightarrow f=X^3-X^2+3X+4,$ cu rădăcinile x_1,x_2,x_3 ....0,25p

Observăm că $x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=-5<0$ 0,5p

Cum $x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}<0$ este fals dacă $x_1,x_2,x_3\in R \Rightarrow$ nu toate rădăcinile polinomului f sunt reale 0,25p

2) a) $f(2)=2^3-5\cdot 2^2+5\cdot 2-1=-3$ 0,5p

b) $f \vdots X-1 \Leftrightarrow f(1)=0$ 0,5p

Efectuând împărţirea polinomului f la X-1 se obţine

$f=(X-1)(X^2-4X+1) \vdots X-1$..0,5p

c) Din relaţiile lui Viete obţinem

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}=5 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a}=5 \\ x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}=1 \end{cases}$$ 0,5p

Aducând fracţiile din egalitatea $\frac{x_1}{x_2x_3}+\frac{x_2}{x_1x_3}+\frac{x_3}{x_1x_2}=ax_1x_2x_3$ la acelaşi numitor obţinem

$$\frac{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}}{x_1x_2x_3}=ax_1x_2x_3 \Leftrightarrow \frac{(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)}{1}=a\cdot 1$$

$\Leftrightarrow 25-2\cdot 5=a \Leftrightarrow a=15$....................................0,5p

d) Folosind prima relaţie a lui Viete $x_1+x_2+x_3=5$ putem afla

$x_1+x_2=5-x_3$

$x_1+x_3=5-x_2$ 0,75p

$x_2+x_3=5-x_1$

Deci

$(x_2+x_3)(x_1+x_3)(x_1+x_2)=(5-x_1)(5-x_2)(5-x_3)=(25-5x_1-5x_2+x_1x_2)(5-x_3)=$

$=125-25(x_1+x_2+x_3)+5(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)-x_1x_2x_3=$

$=125-125+25-1=24$ ....0,75p e)Pentru a afla rădăcinile polinomului f trebuie să rezolvăm ecuaţia polinomială

$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-5x^2+5x-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-4x+1)=0$..........................0,5p

Avem deci $x-1=0 \Rightarrow x_1=1$

sau $x^2-4x+1=0$ de unde gasim rădăcinile

$x_2=2+\sqrt{3}$

$x_3=2-\sqrt{3}$ 0,5p

+1p din oficiu